MATEMÁTICAS II (PAU SETEMBRO 2010)

OPCIÓN A

1. **a) Pon un exemplo de matriz simétrica de orde 3 e outro de matriz antisimétrica de orde 3.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ matriz simétrica de orde 3 ($M = M^t$)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz antisimétrica de orde 3 ($M = - M^t$)

b) Sexa M unha matriz simétrica de orde 3, con det(M)= - 1. Calcula razoando a resposta, o determinante de $M+M^t$, sendo M^t a matriz trasposta de M.

M simétrica $\rightarrow M = M^t$

$M + M^t = M + M = 2M$

$\det (M + M^t) = \det (2M) = 2^3 \det (M) = - 8$

c) Calcula unha matriz X simétrica e de rango 1 que verifique:

$$X\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X simétrica $\rightarrow$ X es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

X de rango 1 $\rightarrow$ los vectores (a, b) y (b, c) son proporcionales. Por tanto:

$(b, c) = \lambda (a, b) \rightarrow \begin{cases} b=\lambda a \\ c=\lambda b \end{cases}$

Por tanto, tomando $c = \lambda b$, la matriz X resulta: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & \lambda b \end{pmatrix}$

Ahora, tenemos que X tiene que verificar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & \lambda b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ b+2\lambda b=0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $b(1+2\lambda)=0 \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ 1+2\lambda=0 \rightarrow \lambda=\frac{-1}{2} \end{cases}$

Si $\lambda=\frac{-1}{2}$, como $b=\lambda a$, la primera ecuación resulta:

$a+2(\frac{-1}{2}a)=0=2$ Por tanto, λ no puede tomar ese valor ya que no verificaría la primera ecuación.

Tomamos $b=0$. Obtenemos sustituyendo en la primera ecuación que $a=2$. Por tanto, la matriz X resulta:

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dada a recta r : $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z-3=0} \\ \mathbf{3x+5y+3z-7=0} \end{cases}$

a) Calcula a ecuación xeral do plano π perpendicular a r e que pasa polo punto P(2,-1,-2).

(1,1,1) es el vector normal al primer plano que determina la recta, y por tanto, perpendicular a la dirección de la recta, por estar ésta contenida en el plano.

(3,5,3) es perpendicular al vector director de la recta por ser vector normal del segundo plano.

Por tanto, el plano π :

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & 5 \\ z+2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-2x+2z+8=0$$

La ecuación del plano es por tanto: π : $-x+z+4=0$

MATEMÁTICAS II (PAU SETEMBRO 2010)

b) Calcula o punto Q no que r corta a π. Calcula o ángulo que forma o plano π con cada un dos planos coordenados.

Resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z-3=0 \\ 3x+5y+3z-7=0 \\ -x+z+4=0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 3x+3y+3z-9=0 \\ - \quad 3x+5y+3z-7=0 \\ \hline -2y-2=0 \rightarrow y=-1 \end{array}$$

Sustituimos en la primera ecuación $y=-1$ y le sumamos la tercera:

$$\begin{array}{r} x+z-4=0 \\ + \quad -x+z+4=0 \\ \hline 2z=0 \rightarrow z=0 \end{array} \qquad x-4=0 \rightarrow x=4$$

Por tanto, el punto Q en el que se cortan es: Q = (4, -1, 0)

Calculemos el ángulo que forma el plano con cada uno de los planos coordenados:

- Con el plano x = 0:

El plano x = 0 tiene como vector normal $\vec{v_1}=(1,0,0)$ y el plano π tiene como vector normal al vector $\vec{w}=(-1,0,1)$. Por tanto, el ángulo que forman estos dos planos es:

$$\cos(\vec{v_1},\vec{w})=\frac{|1.-1+0.0+0.1|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha=arcos(\frac{\sqrt{2}}{2})=45^{\circ}$$

- Con el plano y = 0:

Este plano tiene vector normal $\vec{v_2}=(0,1,0)$. Por tanto:

$$\cos(\vec{v_2},\vec{w})=\frac{|0.-1+1.0+0.1|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=0 \rightarrow \alpha=arcos(\frac{\sqrt{2}}{2})=90^{\circ}$$

- Con el plano z = 0:

El vector normal a este plano es $\vec{v_3}=(0,0,1)$. Por tanto:

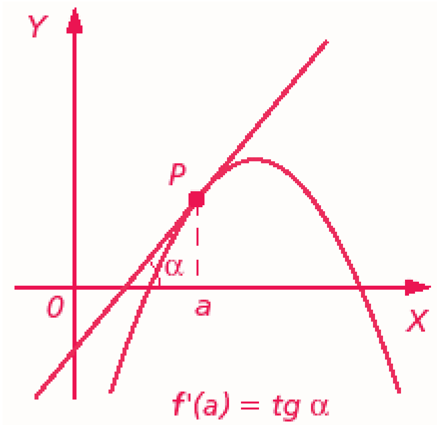
MATEMÁTICAS II (PAU SETEMBRO 2010)

$$\cos(\vec{v}_3, \vec{w}) = \frac{|0.-1+0.0+1.1|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = arcos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{o}$$

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

$$f'(a) = \frac{\lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a)}{h}$$

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente á la función en ese punto:

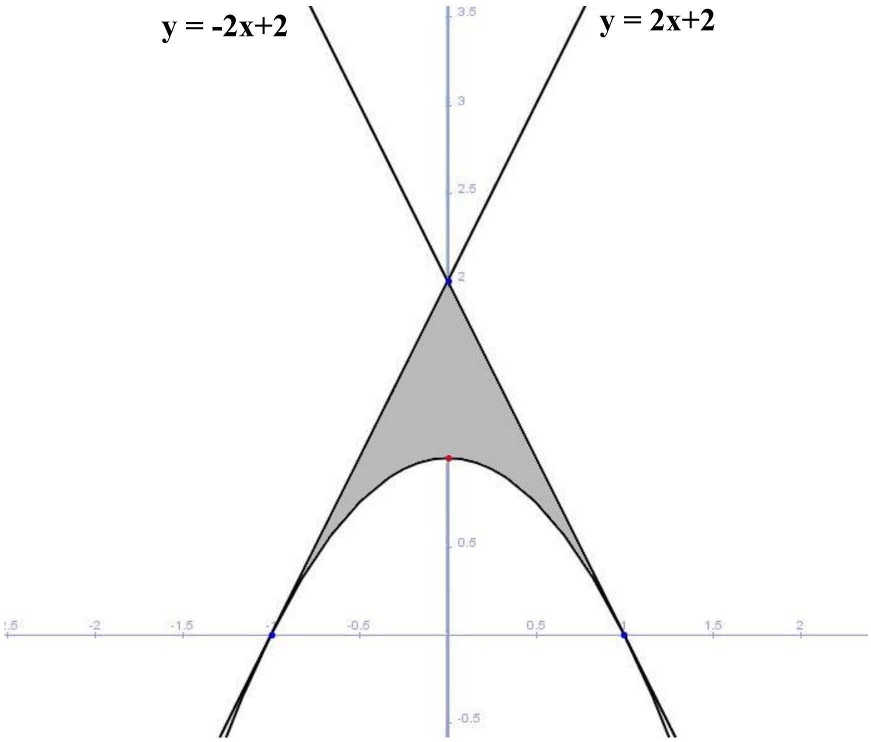


b) Calcula: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{\text{sen}(x^2)}$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{\text{sen}(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\text{sen}x}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{2\cos(x^2) + 4x^2\text{sen}(x^2)} = \frac{4}{2} = 2$$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y = -x^2 + 1$ e as rectas tanxentes á parábola co eixo OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).



Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son :

$-x^2+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$

Las rectas tangentes a la parábola en estes puntos son:

$$\begin{cases} \mathbf{y = 2x + 2} \\ \mathbf{y = -2x + 2} \end{cases}$$

Como la parábola es simétrica respecto del eje OY, las regiones que quedan a ambos lados de este eje tienen la misma área. Por tanto, basta hallar la región encerrada por el eje OY, la parábola y la recta tangente en x=1 y multiplicarlo por 2. Para hallar esto, calculamos el área que encierra la recta tangente con el eje OX y le restamos el área que encierra la parábola:

$$A=2\left(\int_0^1 (-2x+2)\,dx-\int_0^1 (-x^2+1)\,dx\right)=2\left((-x^2+2x|_0^1)-\left(\frac{-x^3}{3}+x|_0^1\right)\right)=2\left(1-\left(\frac{-1}{3}+1\right)\right)=\frac{2}{3}u^2$$

OPCIÓN B

MATEMÁTICAS II (PAU SETEMBRO 2010)

1. **a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuación lineais**

$$\begin{aligned} mx + y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= m \end{aligned}$$

La matriz del sistema (A) y su matriz ampliada (A') son:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 2\mathrm{m} + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

Entonces, si $m \neq -2$, rg (A) = rg(A') = nº incognitas, el sistema es compatible determinado.
Si $m = -2$, rg(A) = 2, rg(A') = 3, por tanto, el sistema es incompatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg(A') = 3$$

b) Resólveo, se é posible, para os casos $m = 0$ e $m = -1$

- $m = 0$

El sistema es homogéneo y por tanto (0,0,0) es una solución del sistema que será la única por ser el sistema compatible determinado.

- $m = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} -x + y - 2z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \\ -z &= -1 \end{aligned} \right.$$

$$z=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x=\frac{-3}{2}$$

La solución del sistema es $\left(\frac{-3}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

2. Dadas as rectas r: $\begin{cases} \mathbf{x=3-3\lambda} \\ \mathbf{y=-4\lambda} \\ \mathbf{z=-6} \end{cases}$ **; s:** $\begin{cases} \mathbf{4x-3y-12=0} \\ \mathbf{5y-4z-4=0} \end{cases}$ **.**

a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte e o ángulo que forman r e s.

Escribimos las ecuaciones implícitas de la recta r:

$$\begin{cases} \lambda=\frac{3-x}{3} \\ \lambda=\frac{-1}{4}y \\ z=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+3y+12=0 \\ z-6=0 \end{cases}$$

Hallamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=20\neq 0 \quad \text{Por tanto, rg (A) = 3}$$

Determinamos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ -4 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

La primera fila es -1 por la tercera fila, por tanto, al ser proporcionales, el rango de la matriz ampliada es 3.

Tenemos así que rg(A)=rg(A')=3. Por tanto, las rectas son secantes. Hallemos el punto de corte:

$$z=-6 \quad \rightarrow \quad 5y+24-4=0 \quad \rightarrow \quad y=-4 \quad \rightarrow \quad -4x-12+12=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

Por tanto, el punto de corte de las rectas es: P = (0, - 4, - 6)

Ahora, el ángulo que forman dos rectas, es el ángulo que forman sus vectores directores. Hallemos entonces el vector director de la recta s:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 16\vec{j} + 20\vec{k} = (12, 16, 20)$$

Dividimos por cuatro y obtenemos que el vector director de la recta es $\vec{v} = (3, 4, 5)$

El vector director de la recta r es $\vec{w} = (-3, -4, 0)$ .Así:

$$\cos\alpha = \frac{|-9-16+0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{25}{\sqrt{(50)}\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, el ángulo que forman las dos rectas es $\alpha = 45^{o}$

b) Calcula, se existe, o plano que as contén.

Sabemos que el plano pasa por el punto P = (3,0,-6) ya que es un punto de la recta r y tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas que son $\vec{w} = (-3, -4, 0)$ y $\vec{v} = (3, 4, 5)$. Por tanto, la ecuación del plano viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -3 & 3 \\ y & -4 & 4 \\ z+6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -20\text{x} + 60 + 15\text{y} = 0$$

Por tanto, la ecuación del plano viene dado por π: - 4x + 3y + 12 = 0.

3. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

Dominio:

D(f) = $\mathbb{R}^2 - \{2\}$

Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$y = 0 \rightarrow x = 0$

Por tanto, la función solo corta a los ejes en el punto (0, 0).

Asíntotas:

La función tiene una asíntota vertical en x = 2:

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = +\infty$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblícuas:

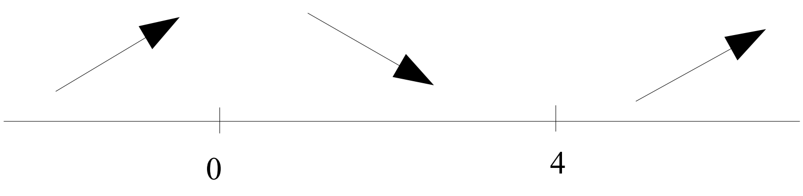
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-2} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = 2$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblícua y = x + 2.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



Máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

La derivada segunda no se anula en ningún punto, por tanto, la función no tiene ningún punto de inflexión.

<u>Máximos y mínimos:</u>

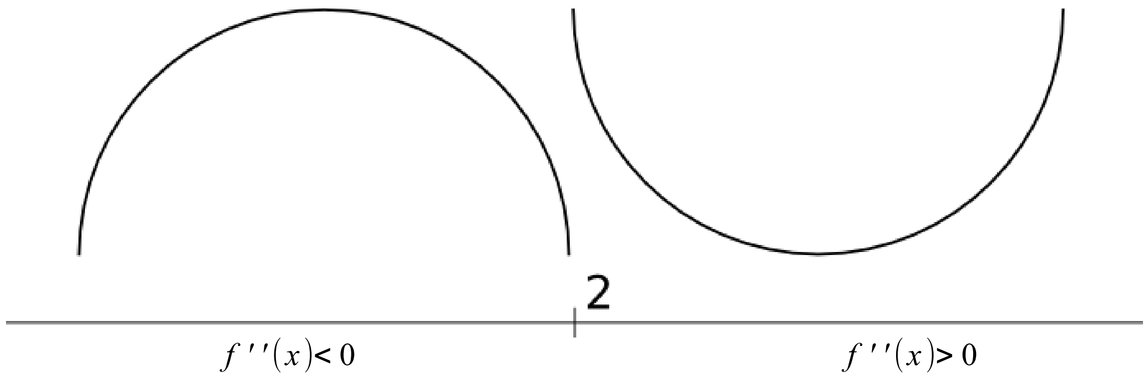
En el punto x = 0:

$f''(0) < 0$ Por tanto, f tiene un máximo en el punto (0, 0).

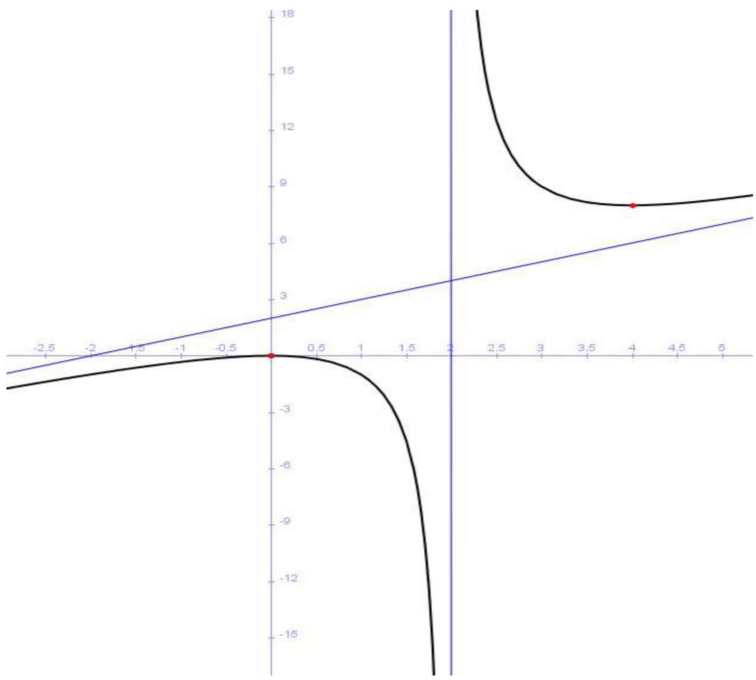
En el punto x = 4:

$f''(4) > 0$ Por tanto, f tiene un mínimo en el punto (4, 8).

<u>Concavidad y convexidad:</u>



Por tanto, la función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, \infty)$



MATEMÁTICAS II (PAU SETEMBRO 2010)

4. a) Calcula $\int x\ln(1+x^2)\,dx$.

Hacemos un cambio de variable $t=1+x^2 \rightarrow dt=2\mathrm{xdx} \rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$. Así:

$$\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int \ln(t)dt=\frac{1}{2}(t\ln t-t)$$

$$u=\ln t \rightarrow du=\frac{1}{t}dt$$
$$dv=dt \rightarrow v=t$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}(t\ln t-t)=\frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2)-(1+x^2))$$

b) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces existe un número z ϵ [a, b] tal que:

$$\int_a^b f(x)dx=f(z)(b-a)$$

Considerando a f(x) ≥ 0, en todo punto de [a, b] se tiene que $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región encerrada por la curva f(x), las rectas x = a, x = b y el eje OX. Entonces, el teorema del valor medio establece que existe un número z ϵ [a, b] tal que la área del rectángulo ABCE, cuyas dimensiones son f(z) de altura y (b – a) de ancho es igual al área de la región encerrada por f(x), las rectas x=a, x=b y el eje OX.