MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CCSS (PAUU XUÑO 2011)

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **, calcula la inversa de la matriz (A^2 + I), siendo I la matriz identidad de orden 3.**

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\rangle \xrightarrow{F_3+F_2} \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1 - 3F_3} \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\rangle \underset{-F_2}{\xrightarrow{½ F_1}} \left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle$$

Por tanto:

$$(A^2+I)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Una empresa compra distintos artículos de adorno y los empaqueta en cajas para su distribución. El coste promedio por caja (en euros) está dado por $\mathbf{C(x)=3x-18\ln x+\frac{120}{x}+50,\ \ x>0,}$ **siendo x el número de cajas que empaqueta (ln: logaritmo neperiano). Determina el número de cajas que deben empaquetar para minimizar el coste promedio por caja C(x).**

$$c'(x)=3-\frac{18}{x}-\frac{120}{x^2}=0$$

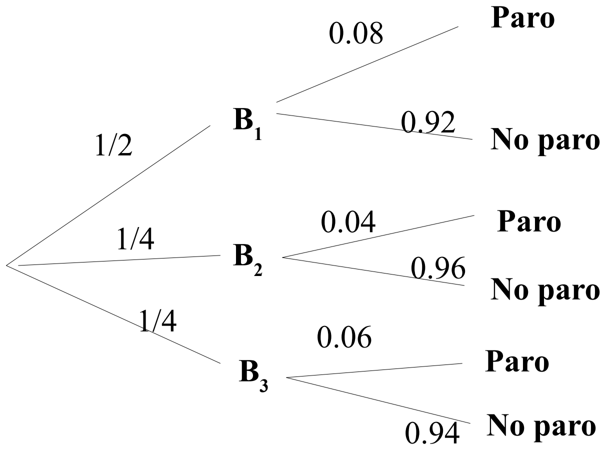
Haciendo un cambio de variable : $y=\dfrac{1}{x}$, la ecuación resulta :

$$-120\,y^2+18y-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{-18\pm\sqrt{18^2+4.120.3}}{240}=\frac{-18\pm 42}{240} \quad \begin{cases} y = 0.1 \\ \cancel{y = -0.25} \end{cases}$$

La solución no puede ser negativa, ya que y es el inverso del número de cajas. Por tanto, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que:

$0.1=\dfrac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x=10$ número de cajas que deben empaquetar para minimizar el coste promedio.

<u>3</u>. Se quiere realizar un estudio sobre la situación laboral de los trabajadores en tres sectores de la economía que denotaremos por B_1, B_2 y B_3. La mitad de los trabajadores pertenecen al primer sector B_1 y el resto se reparten en partes iguales entre los otros dos sectores B_2 y B_3. El 8% de los del sector B_1, el 4% de los del sector B_2 y el 6% de los del sector B_3 están en el paro.



a) Calcula el porcentaje de paro entre los trabajadores de dicho estudio:

$$P(paro)=P(B_1\cap Paro)+P(B_2\cap Paro)+P(B_3\cap Paro)=\frac{1}{2}0.08+\frac{1}{4}0.04+\frac{1}{4}0.06=0.065$$

Por tanto, el porcentaje de los que están en paro es 6,5 %.

b) ¿ Qué porcentaje de los que tienen trabajo pertenecen al sector B_3?

$$P(B_3/No\ paro)=\frac{P(B_3\cap No\ paro)}{P(No\ paro)}=\frac{\frac{1}{4}0.94}{1-0.065}=0.251337$$

El porcentaje de los que tienen trabajo pertenecientes al sector B_3 es de aproximadamente el 25,13%.

4. Debido a la futura fusión de dos entidades de ahorro, un estudio preliminar estima que, como máximo, un 5% de los clientes causará baja en la nueva entidad resultante. Un analista de mercado sospecha que la proporción de bajas será mayor y, para contrastarlo, realiza una encuesta a 400 clientes, elegidos al azar, sobre su intención de seguir operando con la nueva entidad resultante de la fusión. De ellos, 370 contestan que seguirían con la nueva entidad.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la proporción es la que se formula en el estudio preliminar frente a la que sospecha el analista. ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5%?

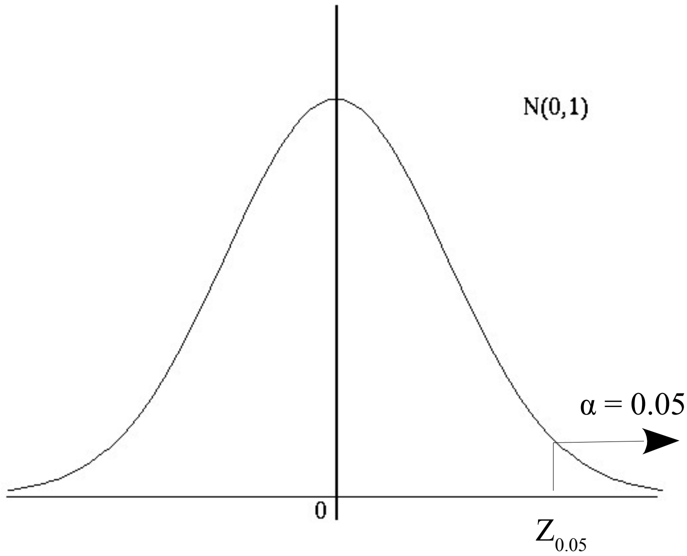
$H_0 : p \leq 0.05$

$H_1 : p > 0.05$

$$\hat{p}=\frac{30}{400}=0.075$$

$$Z=\frac{p-\hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \quad \sim N(0,1)\ \ bajo\ H_0$$

$$Z=\frac{0.05-0.075}{\sqrt{\frac{0.075\,x\,0.925}{400}}}=-1.8985$$



$Z_{0.05} = 1{,}645$

Región de aceptación: $(- \infty, 1. 645)$, $Z \in (- \infty, 1.645)$ Por tanto, aceptamos H_0 con un nivel de significación del 5%, es decir, aceptamos que como máximo un 5% de los clientes causará baja al fusionarse las entidades.

b) Explica, en el contexto del problema, en qué consisten los errores de tipo I y de tipo II.

RESULTADO DEL TEST

		Aceptar H_0	**Rechazar H_0**
REALIDAD	**H_0**		**ERROR TIPO I**
	H_1	**ERROR TIPO II**	

ERROR TIPO I = P (rechazar H_0 / H_0 es cierta)

ERROR TIPO II = P (aceptar H_0 / H_0 no es cierta)

El error tipo I es la probabilidad de rechazar la hipótesis de que el porcentaje de bajas será como máximo del 5% cuando esto es cierto.

El error tipo II es la probabilidad de aceptar la hipótesis de que el porcentaje de bajas será como máximo del 5% cuando en realidad esto no es cierto.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CCSS (PAUU XUÑO 2011)

OPCIÓN B

1. Una asesoría laboral tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Para el próximo año quiere conseguir como clientes a menos a 5 empresas y a un número de particulares que, como mínimo debe de superar en 4 al doble de empresas. Además, el número total de clientes anuales no debe superar los 40 clientes. Espera que cada empresa le produzca 800 € de ingresos anuales y cada particular 600 € anuales.

a) Expresa las restricciones del problema. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

x = " número de empresas"

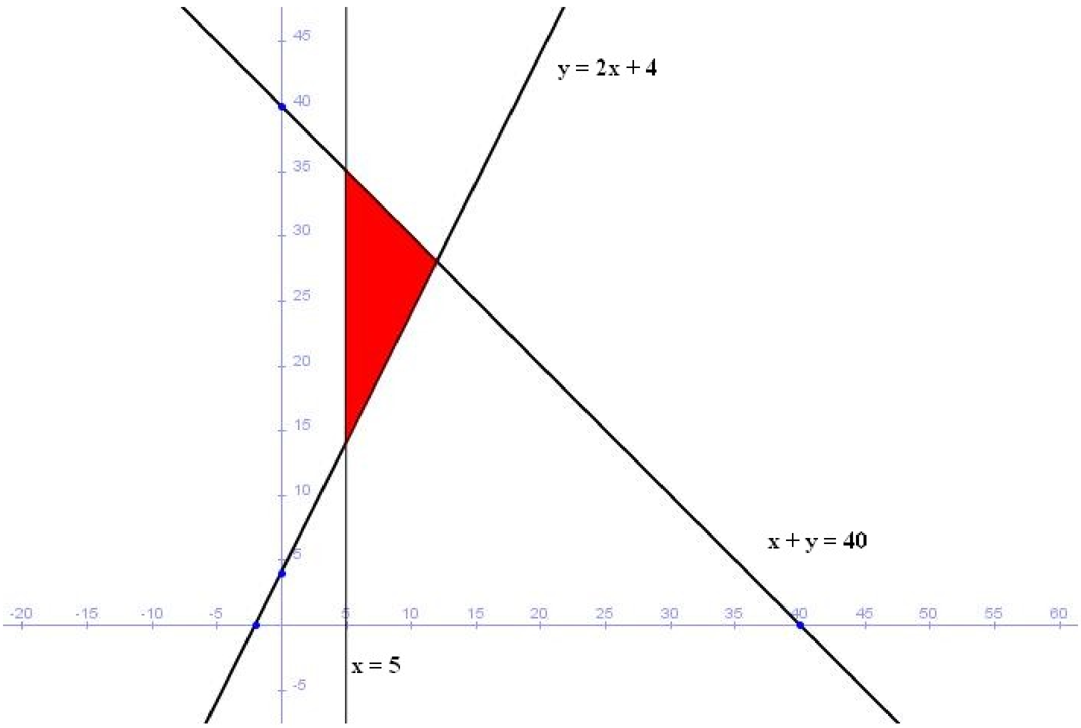
y = "número de particulares"

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} y > 2x + 4 \\ x + y \leq 40 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Los vértices de la región son los puntos:

(5, 14) , (5, 35) y (12, 28)



b) ¿ Qué solución le proporcionaría los mayores ingresos anuales? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

La función objetivo es z(x, y) = 800x + 600y

z(5, 14) = 12400

z(5, 35) = 25000

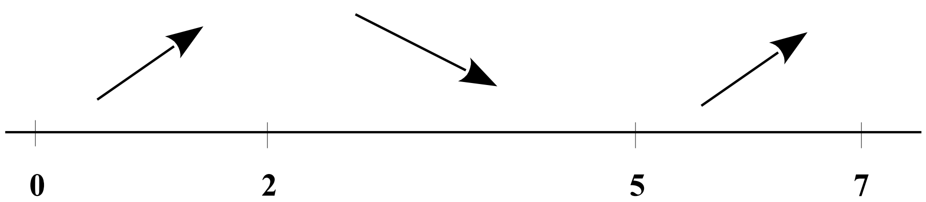
z(12, 28) = 26400

Por tanto, la asesoría tendría que tener en su cartera a 12 empresas y 28 particulares para obtener los máximos ingresos, que ascenderían a 26400€.

2. El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de Bolsa, viene dado por la función p(t) = $4t^3 - 42t^2 + 120t + 200$, $0 \leq t \leq 7$, t es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana (t = 0) y finaliza 7 horas después (a las 5 de la tarde).

a) ¿Entre qué horas el precio de la acción sube y entre qué horas baja? ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un valor máximo relativo?, ¿y un mínimo relativo? Calcula dichos valores.

$$p'(t) = 12t^2 - 48t + 120 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{84 \pm \sqrt{1296}}{24} \begin{cases} t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$



$0 \leq t \leq 7$

Por tanto, el precio de la acción sube en $(0, 2) \cup (5, 7)$, es decir, desde las 10 de la mañana a las 12 y desde las 3 de la tarde a las 5. El precio de la acción baja entre las 12 de la mañana y las 3 de la tarde.

Existe un máximo relativo en t = 2 , M = (2, 304)

Existe un mínimo relativo en t = 5 , m = (5, 250)

b) ¿ Se alcanza en algún momento un valor máximo absoluto?, ¿y un valor mínimo absoluto? En caso afirmativo, calcula dichos valores.

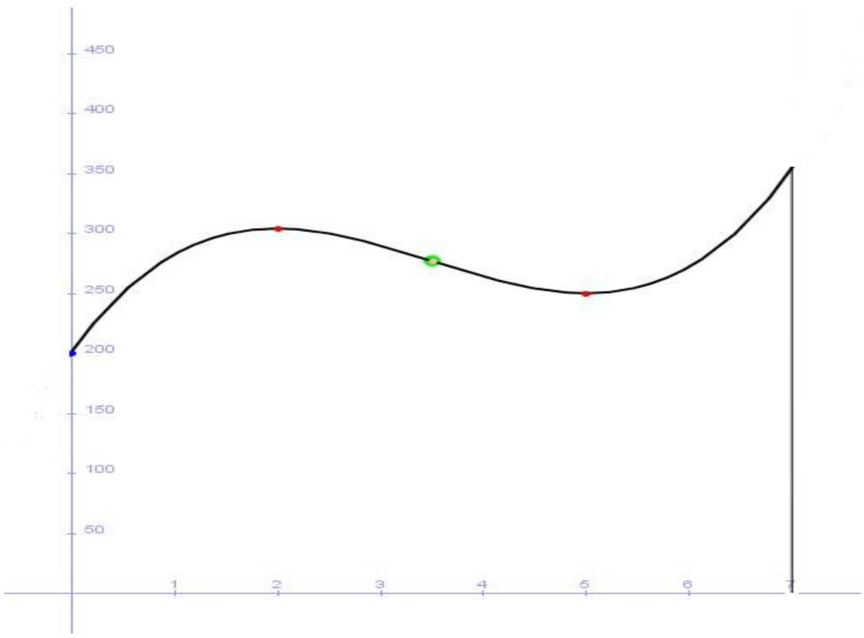
El máximo absoluto es M = (7, 354)
El mínimo absoluto es m = (0, 200)

c) Utilizando los resultados anteriores y calculando el punto de inflexión, traza la gráfica de la función p(t).

Hallamos el punto de inflexión y trazamos la gráfica p(t) con los resultados anteriores.

$$p''(t)=24t-84=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{21}{6}=3.5$$

El punto de inflexión es I = (3.5 , 277)
Los puntos rojos en la gráfica representan los puntos de mínimo y máximo relativos y el punto verde el punto de inflexión.



MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CCSS (PAUU XUÑO 2011)

3. La probabilidad de que se entregue un cheque sin fondos en una entidad bancaria es 0,14. Si en dicha entidad se reciben 900 cheques, calcula:

a) El número esperado de cheques sin fondo.

X = "número de cheques sin fondos"

E [X] = p.n = 0.14 x 900 = 126 cheques.

b) La probabilidad de que se entreguen más de 110 cheques sin fondo.

$$¿P(X > 110)?$$

X = " número de cheques sin fondos", X $\sim$ B(n,p) = B(900, 0.14)

$np = 126 > 5$ y $nq = 774 > 5$ Por tanto, podemos aproximar la binomial por la normal:

X $\sim$ N(126, $\sqrt{108.36}$). Tipificamos:

$$Z = \frac{X - 126}{\sqrt{108.36}} \sim \text{N}(0, 1)$$

$$P(X > 110) = 1 - P(X \leq 110) = 1 - P(X \leq 110 + 0.5) = 1 - P\left(Z \leq \frac{110.5 - 126}{\sqrt{108.36}}\right) =$$
$$= 1 - P(Z \leq -1.489) = 1 - 0.0681 = 0.9319$$

4. Se conoce que la renta por persona declarada por todos los ciudadanos de un país sigue aproximadamente una distribución normal con media 10840 € y desviación típica 2700 €. Con objeto de analizar la renta de los contribuyentes domiciliados en una cierta Administración de Hacienda, se ha tomado una muestra aleatoria de 400 declaraciones, obteniéndose una renta media de 10500 € por persona. Si se supone que se mantiene la desviación típica,

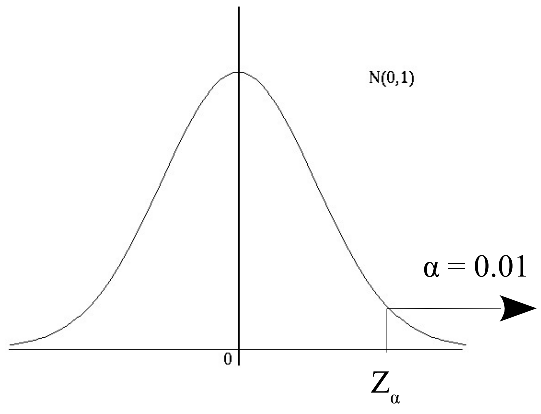
a) plantea un test para contrastar la hipótesis de que la renta media de las declaraciones presentadas en la Administración es la misma que la global para todo el país, frente a que es menor, tal como parece indicar la muestra, y explica claramente a que conclusión se llega, con un nivel de significación del 1%.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CCSS (PAUU XUÑO 2011)

Definimos la variable: X = " renta por persona", $X \sim N(10840, 2700)$

$H_0: \ \mu \leq 10.500$

$H_1: \ \mu > 10.500$

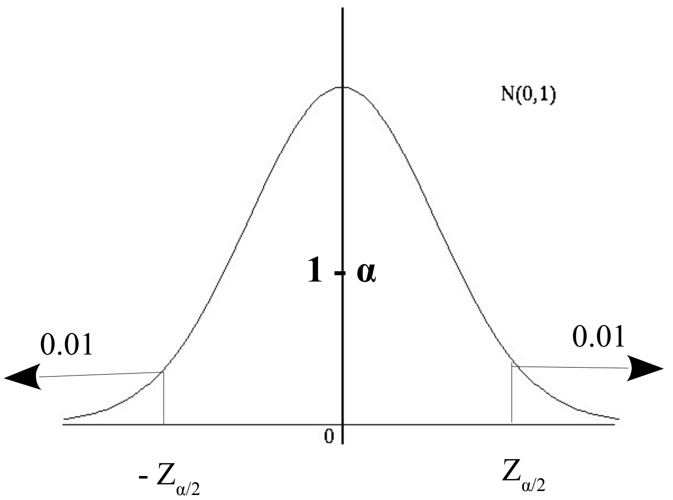


$Z_{0.01} = 2.33$

$$Z = \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$Z = \dfrac{10.840 - 10.500}{2.700} = 0.126$ Є (- ∞, 2.33) = Región de Aceptación. Por tanto, se acepta la hipótesis nula con un nivel de significación del 1%.

b) Calcula un intervalo del 98% de confianza para la renta media de los contribuyentes de la citada Administración.



$Z_{\alpha/2} = Z_{0.01} = 2'33$

$$I = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10500 - 2'33.\frac{2700}{20} \ , \ 10500 + 2'33.\frac{2700}{20}\right) =$$

$$= \left(10185'45 \ , \ 10814'55\right) \quad \text{intervalo para la media con nivel de confianza del } 98\%.$$