MATEMÁTICAS II (PAUU XUÑO 2011)

OPCIÓN A

1. a) Sean C_1, C_2, C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det (M) = 4. Calcula enunciando las propiedades de los determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $- C_2$, $2C_1 – C_3$, $C_2 + C_3$.

$$¿\text{Det}\,(-C_2,\ 2C_1 - C_3,\ C_2 + C_3)?$$

$$(C_1,C_2,C_3) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} (C_2,C_1,C_3) \xrightarrow{-1.C_2} (-C_2,C_1,C_3) \xrightarrow{2.C_1} (-C_2,\ 2C_1,C_3) \xrightarrow{2.C_1\ -\ C_3} (-C_2,\ 2C_1 - C_3,C_3) \xrightarrow{C_2 + C_3}$$

$$\rightarrow (-C_2,\ 2C_1 - C_3,\ C_2 + C_3)$$

Por tanto:

$\text{Det}\,(-C_2,\ 2C_1 - C_3,\ C_2 + C_3) = -(-2.\ \text{Det}\,(M)) = 2.\ \text{Det}\,(M) = 8$

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos los valores de a y b para los que $A^{-1} = A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ \frac{1}{a} = a \iff 1 = a^2 \iff a = \pm 1 \end{array} \right.$$

2. a) ¿ Son coplanarios los puntos A(1,0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0) y D(0,2,2)? Si existe, calcula la ecuación del plano que los contiene.

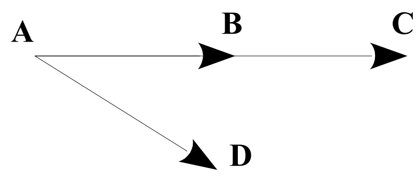
MATEMÁTICAS II (PAUU XUÑO 2011)

$\vec{AB}=(-1,-1,-1)$

$\vec{AC}=(-2,-2,-2)$

Son vectores linealmente dependientes. $\vec{AC}=2\,\vec{AB}$

$\vec{AD}=(-1,2,0)$



Por tanto:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

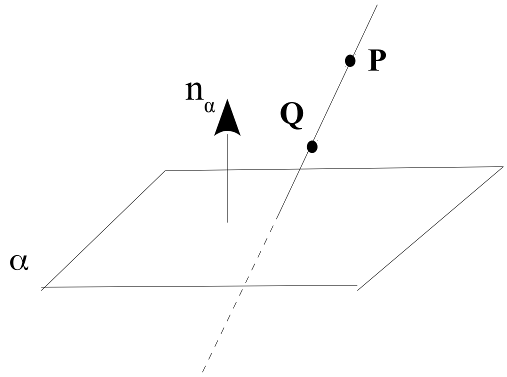
Los puntos son coplanarios.

El plano tendrá como vectores directores los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$ y pasa por el punto A. Por tanto, la ecuación del plano viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=2x+y-3z+4=0$$

Ecuación del plano: $2x + y - 3z + 4 = 0$

b) Calcula la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que es perpendicular al plano α: 2x + y – 3z + 4 = 0 y contiene a la recta que pasa por los puntos P(-1,1,2) y Q(2,3,6).



$\vec{n_\alpha}=(2,1,-3)$

$\vec{PQ}=(3,2,4)$ vector director de la recta.

Por tanto, los vectores directores del plano son $\vec{PQ}\ y\ n_{\alpha}$, el plano pasa por el punto Q. Así, la ecuación del plano viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 3 \\ y-3 & 1 & 2 \\ z-6 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad \Longrightarrow \quad 10x-17y+z+25=0 \ \text{ ecuación general del plano.}$$

Las ecuaciones paramétricas vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 3 + \lambda + 2\mu \\ z = 6 - 3\lambda + 4\mu \end{cases}$$

donde λ, μ son números reales.

3. a) Enuncia el teorema de Rolle . Calcula el valor de k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de f(x).

TEOREMA DE ROLLE : f es una función continua en [a , b] y derivable en (a , b). Si f(a) = f(b), existe algún punto c ϵ (a , b) tal que f'(c) = 0.

$f(x) = x^3 - kx + 10$

$f(2) = 4 = k = f(0)$

$f'(x)=3x^2-k=0 \Leftrightarrow 3x^2=k \Leftrightarrow x=\frac{\pm 2}{\sqrt{3}}$ $\qquad x=\frac{2}{\sqrt{3}}\notin[-2,0]$

Por tanto, $x=\frac{-2}{\sqrt{3}}$

b) Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)=\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+1}>\frac{1}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2>1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

Por tanto, el dominio de definición de g (x) es: $D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$g(x)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$g'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2-1}>\frac{2x}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1>x^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad 1>-1 \quad \text{Esto se verifica siempre,}$$

por tanto, g' es positiva en todo el dominio de definición y por tanto g es una función

creciente en todo su dominio.

<u>4</u>. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola f(x) = x^2 – 2x + 1, su recta tangente en el punto (3,4) y el eje OX. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad).

Hallamos la recta tangente en el punto (3,4):

$$f'(x)=2x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$
$$f'(3)=4$$
$$y-4=4(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad y=4x-8$$

Hallemos los puntos de corte de la parábola con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad para representarla:

$$x^2-2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$

$$x=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=1$$

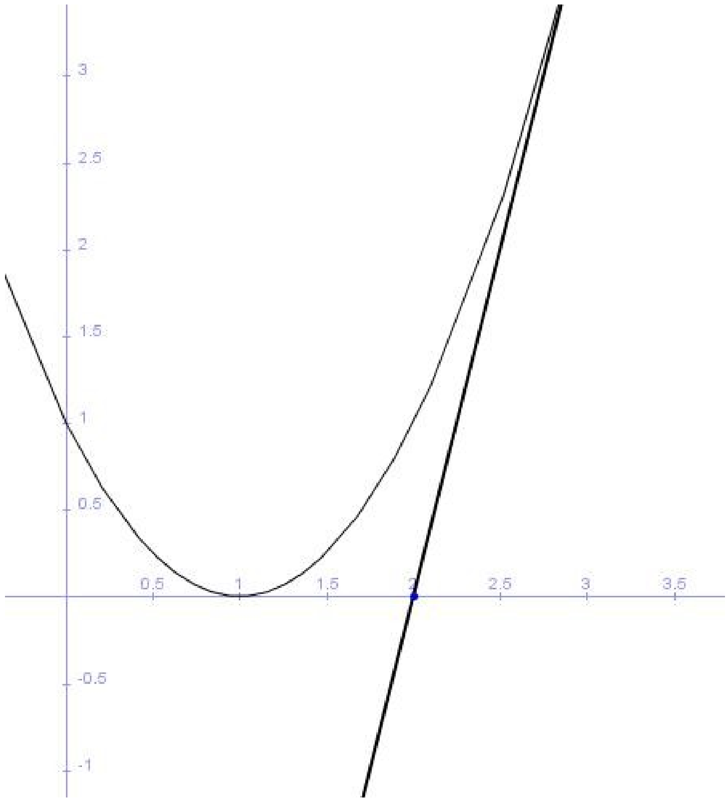
Los puntos de corte con los ejes son: (0,1) y (1,0).

El vértice viene dado por la fórmula $x=\frac{-b}{2a}=1$. Por tanto, el vértice es el punto (1, 0).

Estudiemos ahora la concavidad o convexidad de la parábola:

f'' (x) = 2 > 0 , por tanto, la parábola es cóncava.

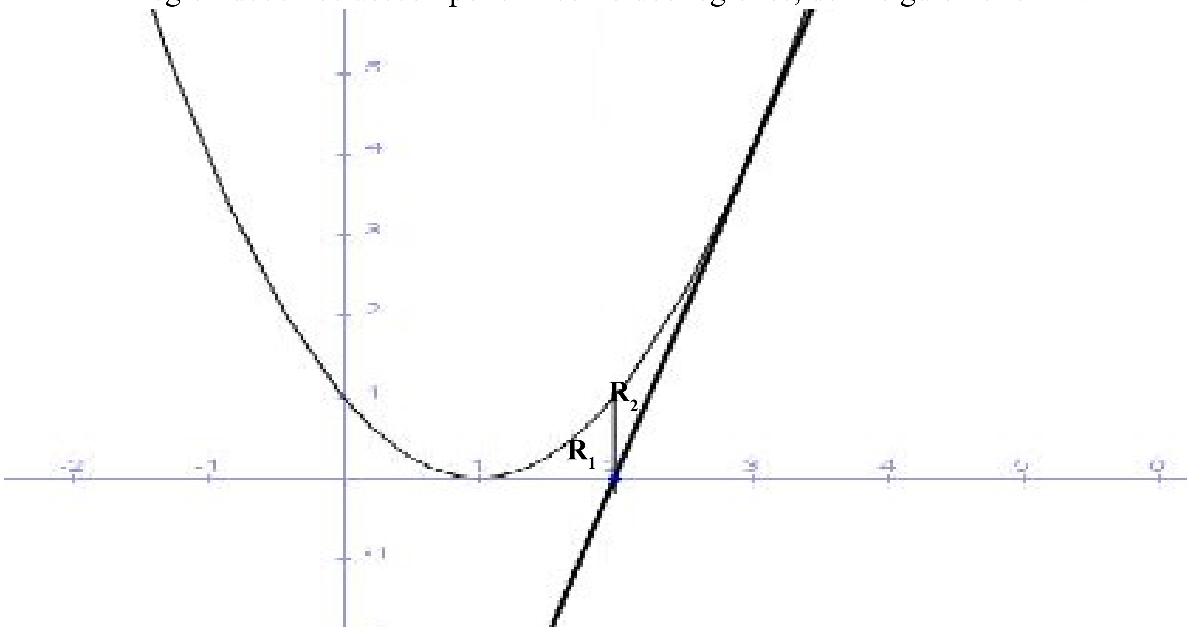
Representamos ambas funciones y vemos la región que delimitan con el eje OX:



El punto de corte de la recta con la parábola:

$4x-8=x^2-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-6x+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$ El punto de corte es el punto (3,4).

Ahora, para hallar la región debemos descomponerla como dos regiones, de la siguiente forma:



$$R_1=\int_1^2 (x^2-2x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^2=\frac{8}{3}-4+2-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{3}$$

$$R_2=\int_2^3 (x^2-2x+1)\,dx-\int_2^3 (4x-8)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_2^3-[2x^2-8x]_2^3=\frac{1}{3}$$

Por tanto, el área que encierran la curva, la recta tangente en el punto (3,4) y el eje OX es:

$$A=R_1+R_2=\frac{2}{3}$$

OPCIÓN B

1. a) Discute según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{mx -2y +2z = 1} \\ \mathbf{2x + my + z = 2} \\ \mathbf{x + 3y - z = m} \end{array}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} m & -2 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & m \end{pmatrix}$$

$$|A|=-m^2-5m+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=\frac{-5\pm\sqrt{25+4}}{2}$$

m = 1

m = -6

¿Rango de A'?

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix}=-2m^2-3m+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}$$

m = 1

m = -5 /2

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & 2 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}=m^3-3m+2=(m-1)^2(m+2)=0$$

m = 1

m = -2

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2\text{m} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

Por tanto:

1. Si m = 1, rg (A) = rg(A') = 2 < 3 El sistema es compatible indeterminado.
2. Si m = -6 , rg(A) ≠ rg(A') El sistema es incompatible.
3. Si m ≠ 1, -6 , rg(A) = rg(A') = 3 El sistema es compatible determinado.

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso m = 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Para m=1, el determinante de la matriz es 0, por tanto, una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Por tanto, el sistema resulta:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 + 2y \\ 2x + z = 2 - y \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2\text{y} & 2 \\ 2-y & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4\text{y}-3}{-3} = \frac{3-4\text{y}}{3}$$

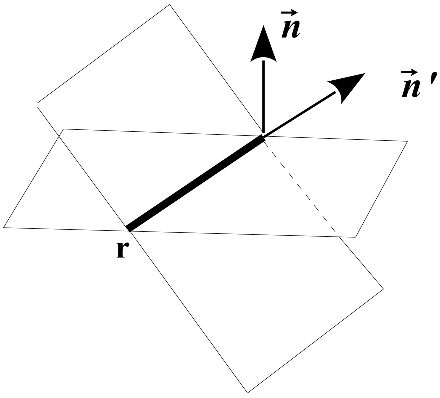
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2\text{y} \\ 2 & 2-y \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}y$$

Solución: $x=\frac{3-4\lambda}{3}$, $y=\lambda$, $z=\frac{5}{3}\lambda$

2. a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,-3) y es perpendicular a la recta:

$$\mathbf{r:}\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ 3x-z+1=0 \end{cases}$$

La recta r viene dada como intersección de dos planos:



Los vectores n y n' son ambos perpendiculares a la recta, por tanto, serán vectores directores del plano perpendicular a la recta.

$\vec{n}=(2,1,0)$, $\vec{n}\,'=(3,0,-1)$

Así, la ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por el punto P(1, 2, -3) viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z+3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-x+2y-3z-12=0$$

Es decir; $\pi : x-2y+3z+12=0$

b) Calcula la distancia d del punto Q(-1, 0,-2) al plano β: x – 2y +3z + 12 = 0. Calcula si existe otro punto de la recta r que también diste d del plano β.

La distancia de un punto a un plano viene dada por:

$$dist(P,\beta)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$dist(Q,\beta)=\frac{|-1-2.3+12|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{5}{\sqrt{14}}$$

Hallemos ahora otro punto de r que diste $\frac{5}{\sqrt{14}}$ del plano β.

Un punto de r es de la forma: P = (x_0 , - $2x_0 - 2$, $3x_0 + 1$)

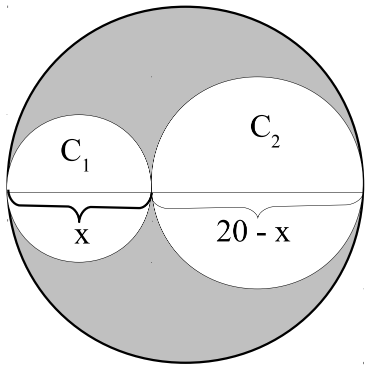
$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 +2 = 0 \quad ; \quad y_0 = - 2x_0 - 2 \\ 3x_0 - z_0 +1 = 0 \quad ; \quad z_0 = 3x_0 + 1 \end{cases}$$

$$d(P,\beta)=\frac{|x_0-2(-2x_0-2)+3(3x_0+1)+12|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow |x_0-2(-2x_0-2)+3(3x_0+1)+12|=5$$

$$\Leftrightarrow |14x_0+19|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 14x_0+19=5 \;;\; x_0=-1 \\ 14x_0+19=-5 \;;\; x_0=-12/7 \end{cases}$$

Por tanto, el otro punto de la recta que dista lo mismo de β es $P=(\frac{-12}{7},\frac{10}{7},\frac{-29}{7})$

<u>3</u>. En una circunferencia de radio 10 cm., se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿ Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (región sombreada)?



El área de la circunferencia grande es: $\pi.r^2 = 100\pi$

El área de la circunferencia C_1 es : $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

El área de la circunferencia C_2 es: $\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2$

Entonces, el área de la región sombreada será:

$$A(x)=100\pi-\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2=\frac{-\pi}{2}x^2+10x\pi$$

$$A'(x) = -\pi x + 10\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi x = 10\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$$

Por tanto, los diámetros de las circunferencias deben tener una longitud de 10 cm para que el área sombreada sea máxima.

4. a) Define función derivable en un punto. Calcula, si existen, los valores de a y b, para que

sea derivable la función f (x) = $\begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Se dice que f es una función derivable en x_0 si existe $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Calculemos los valores de a y b para que la función f(x) sea derivable:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{1-h}{e^h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1-h-e^h}{h.e^h}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1-e^h}{e^h - h.e^h} = -2$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + ah + b - b}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h(h+a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} h + a = a$$

Por tanto, para que f sea derivable, $f'(0^-) = f'(0^+) = a = -2$ y b cualquiera.

b) Define integral definida de una función. Calcula ∫ x^2cosxdx.

Llamamos integral indefinida de una función f(x) a la función $F(x) = \int f(x)$ tal que F'(x) = f(x).

$$\int x^2 . cosx\, dx = x^2 senx - \int 2x\, senx\, dx = x^2 senx - 2 \int x\, senx\, dx = x^2 senx + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$$

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$
$dv = cosx\, dx \rightarrow v = senx$

MATEMÁTICAS II (PAUU XUÑO 2011)

* $\int x\, senx\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x.\cos x + senx$

$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = senx \rightarrow v = -\cos x$